衝突_9_気体分子の衝突によるエネルギー差の変化・ベクトルの演習

組	番	

目的

一種類の元素からなる気体を考える。気体分子（又は原子）が弾性衝突し粒子１と粒子２が速度$\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$で衝突し、速度$\vec{v_1'}$、$\vec{v_2'}$になったとすると、運動量保存則とエネルギー保存則から次式が成り立つ。これらの法則によって、気体分子同士の衝突による速度変化にどのような制約が出るのか調べてみる。

考察

運動量保存則　$m\vec{v_1} + m\vec{v_2} = m\vec{v_1'} + m\vec{v_2'}$

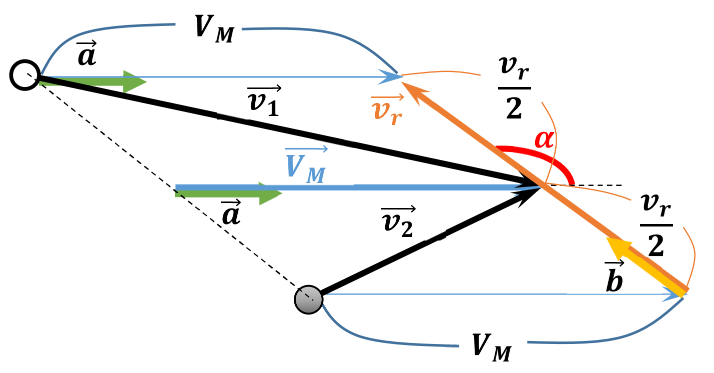
エネルギー保存則　$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$

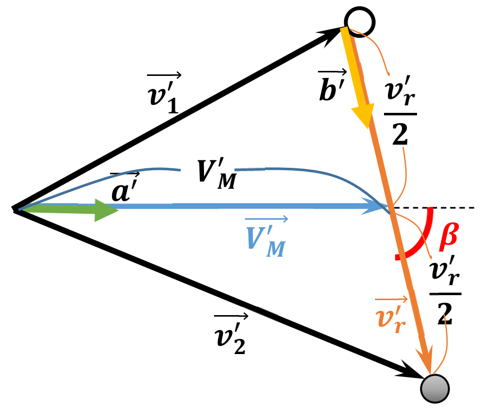
一種類の元素なので質量 m は全て同じだから次のような簡単な関係に書ける。

運動量保存則　$\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_1'} + \vec{v_2'}$

エネルギー保存則　$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2$

さらに簡単な関係にするため、粒子 1,2 のそれぞれの速度$\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$ではなく、重心速度$\vec{V_M}$、相対速度$\vec{v_r}$で考える。





$\frac{\vec{v_1} + \vec{v_2}}{2} = \vec{V_M} = V_M\vec{a}$　　V_M：衝突前の重心の速さ　$\vec{a}$：重心速度の向き

ただし　$\vec{a}\cdot\vec{a} = 1$

$\vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{v_r} = v_r\vec{b}$　　v_r：衝突前の相対的な速さ　$\vec{b}$：相対速度の向き

ただし　$\vec{b}\cdot\vec{b} = 1$

$\frac{\vec{v_1'} + \vec{v_2'}}{2} = \vec{V_M'} = V_M'\vec{a'}$　　V_M'：衝突後の重心の速さ　$\vec{a'}$：重心速度の向き

ただし　$\vec{a'}\cdot\vec{a'} = 1$

$\vec{v_2'} - \vec{v_1'} = \vec{v_r'} = v_r'\vec{b'}$　　v_r'：衝突後の相対的な速さ　$\vec{b'}$：相対速度の向き

ただし　$\vec{b'}\cdot\vec{b'} = 1$

重心速度V_Mと相対速度v_rを使って粒子１，２の速度v_1、v_2を書き直すと次のように書ける。

$$\vec{v_1} = V_M\vec{a} - \frac{1}{2}v_r\vec{b}$$
$$\vec{v_2} = V_M\vec{a} + \frac{1}{2}v_r\vec{b}$$
$$\vec{v_1'} = V_M'\vec{a'} - \frac{1}{2}v_r'\vec{b'}$$
$$\vec{v_2'} = V_M'\vec{a'} + \frac{1}{2}v_r'\vec{b'}$$

【課題Ｉ】：上の４つの式を、図の下の相対速度と重心速度の定義の式から導きなさい。

これを運動量保存則とエネルギー保存則に代入すると重心速度と相対速度に関する関係式になる。

運動量保存則　$V_M\vec{a} = V_M'\vec{a'}$

ここから　　重心の速さは変化しない　$V_M = V_M'$　　重心速度の向きは変化しない　$\vec{a} = \vec{a'}$

エネルギー保存則を使うために２乗をベクトルの内積で計算する。$\vec{a}\cdot\vec{a} = 1$、,$\vec{b}\cdot\vec{b} = 1$、$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos(\alpha)$として

$$v_1^2 = \vec{v_1}\cdot\vec{v_1} = \left(V_M\vec{a} - \frac{1}{2}v_r\vec{b}\right)\cdot\left(V_M\vec{a} - \frac{1}{2}v_r\vec{b}\right)$$
$$= V_M^2\vec{a}\cdot\vec{a} - V_Mv_r\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{4}v_r^2\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= V_M^2 - V_Mv_r\cos\alpha + \frac{1}{4}v_r^2$$

【課題２】：$v_2^2, v_1'^2, v_2'^2$も同様に計算しなさい。

これらを使うと　　エネルギー保存則　$2V_M^2 + \frac{1}{2}v_r^2 = 2V_M'^2 + \frac{1}{2}v_r'^2$

運動量保存則から$V_M = V_M'$なので、ここから　相対的な速さは変化しない　$v_r = v_r'$

考察のまとめ

気体分子の衝突では次のようになる。

1. 重心の速さV_Mは変化しない
2. 重心の速度の向き$\vec{a}$は変化しない
3. 相対的な速さv_rは変化しない
4. 重心速度に対する相対速度の角度α, βには何の制約もない

目的（再び）

気体分子はこうした衝突によって、その速さはどのように変わっていくのだろうか。最終的に皆同じ平均の速さにそろっていくのか、それとも逆にバラバラになっていくのか、それともはじめに与えられた状況のまま変化しないのか。

もし、最終的に同じ速さに近づくなら、二つの粒子の運動エネルギーの差が小さくなっていくことになるので、まず、二つの粒子の運動エネルギーの差ΔEを重心速度と相対速度で表すと次のようになる。

$$\Delta E = \left|\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right| = mV_Mv_r|\cos\alpha|$$

【課題3】：【課題2】の結果を使って上式を導出しなさい。

結論

衝突前後でエネルギー差の変化は次のように、V_Mv_rは変化しないので重心速度と相対速度のなす角度の変化で変化する。

$$\Delta E' - \Delta E = mV_Mv_r(|\cos\beta| - |\cos\alpha|)$$

例えば静止していた粒子２に粒子１を衝突させる場合は$\alpha = 180°$なので$|\cos\alpha| = 1$となり、$|\cos\beta| \leq 1$だからエネルギー差は直線的な衝突$\beta = 0°$以外は減少する。（重心系だと$V_M = 0$でエネルギー差ΔEは０で変化しないので、それは例外的な場合である。）例えばエネルギー差が広がるのは、$\alpha = 90°$のような$|\cos\alpha| = 0$でほぼ同じ速さで斜め衝突して、$\beta = 0°$のように$|\cos\beta| = 1$で違う速さで直線的に離れる場合である。

残された課題

今回の考察でＩ.衝突で2体間の相対的または合成的な量は変化しないこと。2.衝突の角度によって粒子のエネルギー差は広がりも縮まりもすること。がわかった。残された課題は、衝突の角度には何か偏りがあるのか無いのか。球状の原子がランダムな方向から衝突する場合について考えてみよう。

【課題4】：もし衝突角度がランダムだとしたら、気体同士の衝突によって、気体分子のエネルギー差はどうなっていくか。

（課題Ｉ～4は全て別紙に手計算して提出）